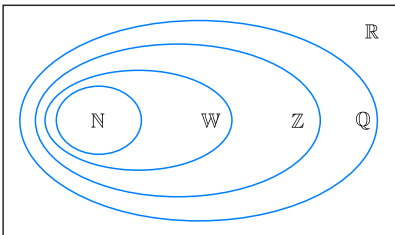




گزینه ۱

۱

مطابق شکل داریم:



$$N \subseteq W \subseteq Z \subseteq Q \subseteq R$$

گزینه ۲

۲

برای اینکه مجموعه $[n - 3, 2n + 1]$ تعریف شود باید $n - 3 < 2n + 1$ باشد:

$$n - 3 < 2n + 1 \Rightarrow -4 < n$$

اگر دو مجموعه $[-1, 1]$ و $[n - 3, 2n + 1]$ جدا از هم باشند ۲ حالت داریم:

$$۱) 2n + 1 < -1 \Rightarrow n < -1$$

$$۲) n - 3 > 1 \Rightarrow n > 4$$

پس شرط اینکه جدا از هم نباشند این است که $-1 \leq n \leq 4$ باشد. اشتراک آن با $n > -4$ برابر با $[-1, 4]$ می شود.

A : فرد بودن عدد سه رقمی

$$\Rightarrow n(A) = \frac{4}{1} \times \frac{3}{3} \times \frac{3}{5} = 36$$

B : بزرگتر از ۳۰۰ بودن عدد سه رقمی

$$\Rightarrow n(B) = \frac{3}{3, 4, 5} \times \frac{4}{1} \times \frac{3}{3} = 36$$

$A \cap B$: فرد بودن عدد سه رقمی بزرگتر از ۳۰۰

$$\Rightarrow n(A \cap B) = \begin{cases} \frac{1}{4} \times \frac{3}{3} \times \frac{3}{1, 3, 5} = 9 \\ \frac{2}{3, 5} \times \frac{3}{1} \times \frac{2}{13 \text{ یا } 15} = 12 \end{cases}$$

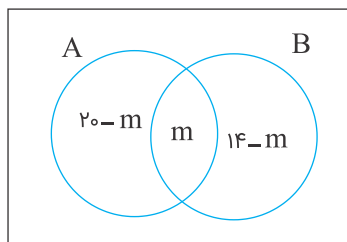
$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B) = 36 + 36 - (12 + 9) = 51$$

$$\begin{aligned} \frac{n(A \cup B)}{n(A \cap B)} &= \frac{n(A) + n(B) - n(A \cap B)}{n(A \cap B)} \\ &= \frac{5n(A \cap B) - n(A \cap B)}{n(A \cap B)} = \frac{4n(A \cap B)}{n(A \cap B)} = 4 \end{aligned}$$

باتوجه به قسمت رنگی که قسمتی از اشتراک B و C است به جز قسمتی که در A است، قسمت رنگ شده را می توان به صورت زیر نوشت:

$$(B \cap C) - A = (B \cap C) \cap A' = (B \cap A') \cap C = (B - A) \cap C$$

اگر $A - B$ بیشترین عضو را داشته باشد باید $A \cap B$ کمترین عضو را داشته باشند. فرض کنیم $n(A \cap B) = m$ پس تعداد اعضا را در نمودار ون مشخص می‌کنیم.



$$۲۰ - m + m + ۱۴ - m \leq ۳۰ \Rightarrow ۳۴ - m \leq ۳۰ \Rightarrow m \geq ۴$$

پس حداقل m برابر ۴ و حداکثر $A - B$ برابر ۱۶ خواهد بود.

ابتدا با توجه به تعریف مجموعه A_i ، مجموعه‌های A_1 ، A_2 و A_5 و A_7 را به صورت بازه‌ای مشخص می‌کنیم. برای به دست آوردن اشتراک دو مجموعه که به صورت بازه‌ای مشخص شده‌اند، ابتدای بازه، بزرگ‌ترین عدد ابتدای دو مجموعه و انتهای بازه، کوچک‌ترین عدد انتهای دو مجموعه در نظر گرفته می‌شود. تست را با استفاده از رسم نمودار هم حل می‌کنیم تا اگر در مشخص کردن مجموعه‌ها به مشکل برخوردید، مشکلاتان به راحتی حل شود.

$$A_i = \left[-i, \frac{9-i}{2}\right]$$

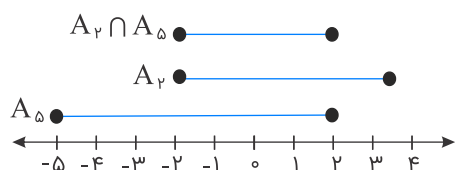
$$A_1 = \left[-1, \frac{9-1}{2}\right] = [-1, 4]$$

$$A_2 = \left[-2, \frac{9-2}{2}\right] = \left[-2, \frac{7}{2}\right]$$

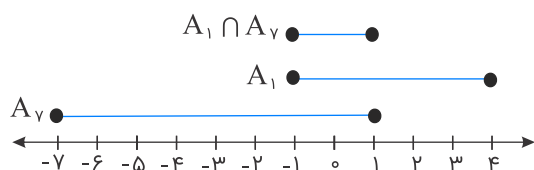
$$A_5 = \left[-5, \frac{9-5}{2}\right] = [-5, 2]$$

$$A_7 = \left[-7, \frac{9-7}{2}\right] = [-7, 1]$$

$$A_2 \cap A_5 = \left[-2, \frac{7}{2}\right] \cap [-5, 2] = [-2, 2]$$



$$A_1 \cap A_7 = [-1, 4] \cap [-7, 1] = [-1, 1]$$



$$(A_2 \cap A_5) - (A_1 \cap A_7) = [-2, 2] - [-1, 1] = [-2, -1) \cup (1, 2]$$

ابتدا مجموعه A را به صورت زیر می‌نویسیم:

$$m^{-۲} > \frac{1}{\omega} \Rightarrow \frac{1}{m^۲} > \frac{1}{\omega} \Rightarrow m^۲ < \omega, \quad m \neq 0 \\ \Rightarrow A = \{-۲, -۱, ۱, ۲\}$$

اکنون برای مجموعه B می‌توان نوشت:

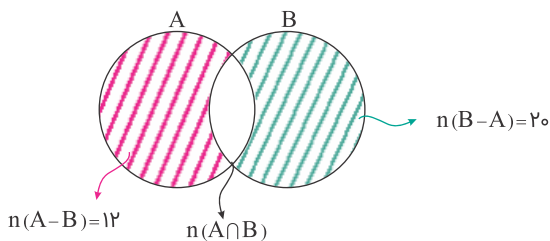
$$\left. \begin{aligned} (-۲)^۴ - \omega(-۲)^۲ + ۴ &= ۰ \\ (-۱)^۴ - \omega(-۱)^۲ + ۴ &= ۰ \\ (۱)^۴ - \omega(۱)^۲ + ۴ &= ۰ \\ (۲)^۴ - \omega(۲)^۲ + ۴ &= ۰ \end{aligned} \right\} \Rightarrow B = \{۰\}$$

بنابراین:

$$B - A = \{۰\} - \{-۲, -۱, ۱, ۲\} = \{۰\}$$

پس $B - A$ یک مجموعه تک عضوی است، بنابراین تعداد زیرمجموعه‌های آن برابر است با $۲^۱ = ۲$.

اطلاعات را روی نمودار ون می‌نویسیم. فقط حواستان باشد $A \cap B'$ همان $A - B$ است.



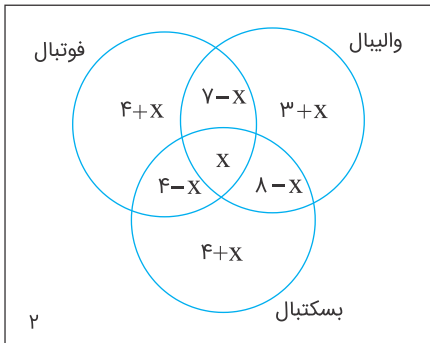
$$n(A \cup B) = n(A - B) + n(B - A) + n(A \cap B) \xrightarrow[n(A \cap B)=x]{n(A \cup B)=۹x} ۹x = ۱۲ + ۲۰ + x \Rightarrow x = ۴$$

تعداد اعضای A را می‌نویسیم:

$$n(A) = n(A - B) + n(A \cap B) = ۱۲ + ۴ = ۱۶$$

اگر بازه $[a, b]$ شامل عددی منفی نباشد، کافی است $a < b$ باشد. یعنی:

$$0 \leq 3 - 2x < x + 6 \Rightarrow \begin{cases} 0 \leq 3 - 2x \\ 3 - 2x < x + 6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \leq \frac{3}{2} \\ -1 < x \end{cases} \Rightarrow x \in (-1, \frac{3}{2}]$$



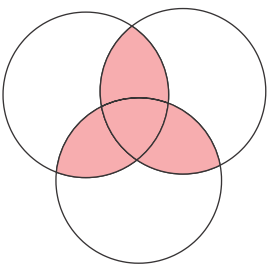
$$4 + x + 7 - x + 3 + x + x + 4 - x + 8 - x + 4 + x = 34 - 2 = 32$$

$$\Rightarrow x = 2$$

سه رشته ورزشی یا دو رشته ورزشی = حداقل دو رشته ورزشی

$$= (7 - x) + (4 - x) + x + (8 - x) \quad \underline{\underline{x=2}} \quad 5 + 2 + 2 + 6 = 15$$

توجه: حداقل دو رشته ورزشی قسمت رنگی نمودار زیر است:



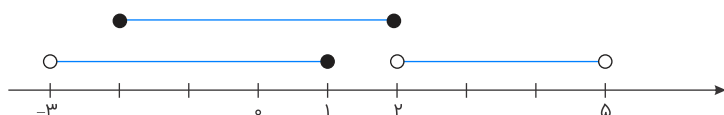
درواقع باید $x + 10 < 3 \leq 2x - 1$ باشد. داریم:

$$2x - 1 \leq 3 \Rightarrow 2x \leq 4 \Rightarrow x \leq 2$$

$$3 < x + 10 \Rightarrow -7 < x$$

بنابراین $x \in (-7, 2]$ است.

مجموعه‌های A و B را روی محور اعداد نشان می‌دهیم:



$A - B$ شامل عضوهایی از A است که در B نیستند.

$$A - B = (-3, -1) \cup (2, 5)$$

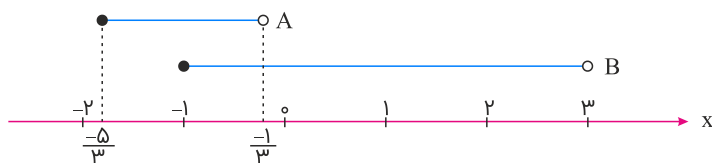
این مجموعه شامل اعداد صحیح ۳ و ۴ است.

باید مجموعه A را پیدا کنیم:

$$3x + 1 \in B \Rightarrow -1 \leq 3x + 1 < 3 \Rightarrow -2 \leq 3x < 2$$

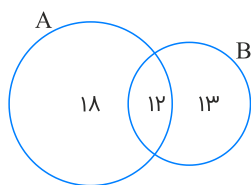
$$\Rightarrow \frac{-2}{3} \leq x < \frac{2}{3} \Rightarrow \frac{-5}{3} \leq x - 1 < \frac{-1}{3}$$

بنابراین $A = [\frac{-5}{3}, \frac{-1}{3})$ است. حاصل $B \cap A'$ یعنی $B - A$ را می‌خواهیم:

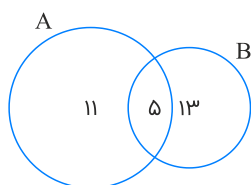


$$B - A = [\frac{-1}{3}, 3)$$

اول شرایط این طوری بوده!



بعد این شکلی شده:



تعداد کل اعضا در حالت جدید برابر است با: $11 + 5 + 13 = 28$

ولی سؤال تعداد عضوهای مجموعه جدید A را با مجموعه قبلی B می‌خواهد. B که ۲۵ عضو داشت. مجموعه جدید A هم ۱۱ عضو دارد که با B مشترک نیست. در کل $25 + 11 = 36$ عضو خواهیم داشت.

فرض کنیم $A_n = [2n - 3, n + 4]$ باشد، آنگاه:

$$A = (-1, 6] \quad , \quad A_1 = [-1, 5] \quad , \quad A_2 = [1, 6]$$

$$A_3 = [3, 7] \quad , \quad A_4 = [5, 8] \quad , \quad A_5 = [7, 9]$$

مجموعه‌های A_1, A_2, A_3 و A_4 با مجموعه A عضو مشترک دارند؛ پس به ازای ۴ عدد طبیعی، مجموعه $[2n - 3, n + 4]$ با مجموعه $(-1, 6]$ عضو مشترک دارند.